單元 7：微分法的應用

7.1 斜率

教師可用圓形向學生介紹 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 這個差商的幾何意義。

學生應了解，當 Δx 趨向 0 時，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限值爲經過曲綫上一點 $(x, f(x))$ 的切綫的斜率，並明白曲綫 $y=f(x)$ 於某點 $(x, f(x))$ 的法綫概念。學生應能掌握簡單曲綫的切綫及法綫方程的求法。

學生應可利用導數值符號的改變來決定有關函數的遞增區域及遞減區域。

教師可首先利用曲綫圖像解釋曲綫的凸性，亦可利用簡單函數 (如：$y=e^x$，$y=\ln x$，$y=3x^3-1$) 去闡釋曲綫凸性的概念，並指出曲綫在某點有凸性改變時，該點稱爲拐點。學生應能求出曲踐的拐點。

7.2 極大和極小

當學生已掌握了斜率及曲綫凸性的知識後，便可與他們討論轉向點的理念。教師可利用圖像提醒學生以下各點：

(i) 曲綫的駐點不一定是它的轉向點。

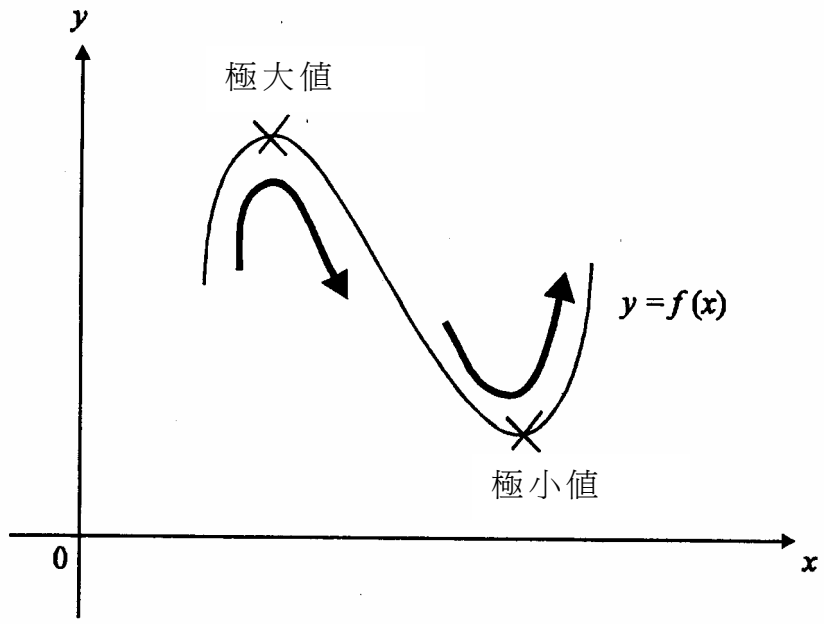
<u>例一</u>
對於 $f(x)=2x^3$，$f'(x)=6x^2$，所以 $f'(0)=0$。但在其他位置，$f'(0)>0$，因此 $(0, 0)$ 是曲綫的駐點而不是它的轉向點。

(ii) 一個函數的極大值或極小值並不一定是它的最大值或最小值。

教師可教導能力較高的學生，轉向點可發生於在某些不存在導數的點 (如：$f(x)=3x^{\frac{2}{3}}$) 。教師應特別指出，當 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\neq 0$ 時，仍可能有極大或極小值存在，例如 $y=3x^{\frac{2}{3}}$。

極大值、極小值及拐點的判別可由以下兩個基本試驗決定：

(i) 一階導數的符號改變。學生可通過圖像直觀地了解其過程。



(ii) 二階導數的符號。教師應強調，當 $f''(a)=0$ 時，不能對 $(a,\ f(a))$ 點的凸性下任何結論。在此情況下，學生須用另一方法來決定那些點的特性。學生應能判斷採用何種方法較適合。

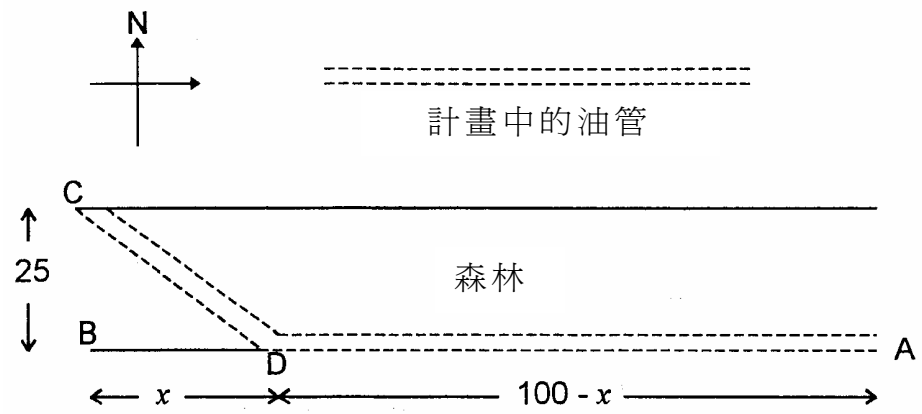
<u>例二</u>

$f(x)=3x^4$的最小值在 $(0,\ 0)$ 點，但 $f''(0)=12(0)^2=0$。所以不能用二階導數的符號作試驗。

在實際問題上，須將變量的定義域限制在一個範圍，故在尋找函數的最大值或最小值時，需一併考慮定義域的臨界值。教師可用現實生活例子解釋。

<u>例一</u>

一產油公司計畫建造一油管從油井 A 點輸送原油至 C 點，然後把石油以油輪運走。計畫圖則如下 ：



A 點與 C 點給森林相隔，該森林闊 25 km，C 點在 A 點以西 100 km。假設沿著森林建造油管的費用爲每公里 $100,000，穿過森林時則爲每公里 $200,000。試決定圖中交點 D 的位置，以便將建造油管的成本降到最低。

例二

要設計一個沒有蓋的金屬圓柱體容器，其固定容積爲 $V\ \text{cm}^3$。若該容器的設計要符合以下條件，試以其半徑 r cm 表示其高 h cm：

(i) 容器的表面面積爲最小；

(ii) 容器的焊接邊長爲最短。

例三

設 t 年後某城市的人口會達到 $P(t)=\dfrac{150}{1+2e^{-0.02t}}$ 百萬 $(t\geq 0)$。隨著時間過去，城市人口會趨向一固定值 P_0 百萬。求這個固定值。求 $P''(t)$，由此求出人口增長最快的年份，答案須準確至最接近的整數。

7.3 描繪簡單曲綫

描繪函數 $y=f(x)$ 的圖形時，應考慮下列各點：

(i) 定義域；

(ii) 遞增區域或遞減區域；

(iii) 局部極大值及局部極小值；

(iv) x 及 y 的截距；

(v) 當 $x\to\pm\infty$ 時，函數的狀態；

(vi) 曲綫的凸性及拐點。

學生應能描繪多項式及 $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 形式的有理函數的圖形。

此外，學生應學會求得曲綫的垂直及水平漸近綫的方法。

例一

流行性感冒在某城市散播。根據以往記錄，在相似情況下，受感染的人數爲一 $N(t)$ 函數，而 $N(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+10t^2+300t+250$，其中 t 以日爲單位及 $0\leq t\leq 40$。試描繪函數 $N(t)$ 在 $0\leq t\leq 40$ 期間的圖像，並且

(i) 解釋 $N(0)$ 的數值；

(ii) 求第 10 日後、第 35 日後受感染的人數；

(iii) 求細菌於 $t=11$ 日及 $t=12$ 日時的瞬間散播速率；

(iv) 求受感染人數的最大速率；

(v) 解釋圖像拐點的意義。

例二

若函數 $f(x)=\dfrac{64(x+3)}{x+8}$ 表示某見習生完成 x 次打手練習課後，在單位時間內打得的正確字數。試繪畫函數 $f(x)$ 的圖像，並估計該見習生完成大量練習後的表現。

7.4 變率

講授本節時，教師應明確指出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可了解爲 y 對於 x 的變率。並舉出涉及不同變率的例子：

例一

一油輪觸礁，漏出原油，形成 0.02 m 厚的圓形油污塊。當油污半徑爲 50 m 時，半徑以每分鐘 0.5 m 速率向外擴散。計算這時漏出油污的表面面積及體積增加率。

例二

設某生產收音機的電子公司成本爲 $\$C$，收入爲 $\$R$，利潤爲 $\$P$，各項的計算公式爲：$C = 5000 + 2x$；$R = 10x - \dfrac{x^2}{1000}$ 及 $P = R - C$，其中 x 表示每星期生產的收音機數目。設當產量爲 2,000 部時，產量以每星期 500 部的速率增加，求這時的成本、收入及利潤的增加率。

例三

設一梯子長 8 m，斜靠在一堵垂直的牆上，已知梯子的底端正以 2.5 m/s 的速率滑離牆腳，當梯子的頂端興地面的距離爲 6 m 時，求該頂端往下滑動的速率。

教師可要求學生在求解前先估算答案。

其他例子如某人在路燈下走過，人影長度的變率問題；倒立正圓錐體容器的漏水問題等，亦可用作講解。

7.5 近似值

學生應學會一次微分的幾何意義，包括：

$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ 及 $f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta y \approx f(x) + f'(x)\Delta x$。

學生應可運用微分去計算在接近某特殊數值時函數值的近似值，並以 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 作簡單的誤差估計。

例一

求 $\sqrt{9.03}$ 的近似值。

例二

在一實驗中，一球體的直徑量度爲 x cm，其體積 V cm^3 可用公式 $V=\frac{1}{6}\pi x^3$ 計算出來。若量得球體直徑爲 10 cm，量度誤差爲 0.02 cm，試估計球體體積的最大及最小的可能值。

例三

在製造機械鐘的過程中，鐘擺的長度出現誤差。一個長度爲 ℓ 米的單擺，其擺動週期爲 T 秒，而 $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$，其中 g 爲常數。如果鐘擺的長度有 3% 的誤差，求在計算 T 時的誤差百分率之近似值。